MIDIENDO EL CIELO Y LA TIERRA

La aventura de medir el cosmos,
de Eratóstenes a la paralaje estelar

FERNANDO J. BALLESTEROS

Shackleton
books

Midiendo el cielo y la Tierra

Shackleton
books

@Shackletonbooks
shackletonbooks.com

Realización editorial: Bonalletra Alcompas, S. L.
Diseño de cubierta: Pau Taverna
Diseño y maquetación: Kira Riera

ISBN: 978-84-1361-137-2
Depósito legal: B 3682-2022
Impreso por GPS Group (Eslovenia).

CONTENIDO

Pretexto. Las dimensiones del universo 7

Palos, sombras y triángulos 11

La sombra de Eratóstenes 15
El centro de Aristarco 31
El guiño de los ojos de Hiparco 40

El rebrotar de la ciencia 49

El sueño del primer milenio 52
Relojes y gigantes 64
El renacer de la ciencia 77
¿Dónde estoy? 86

El tamaño del universo 105

La unidad astronómica 108
La forma de la Tierra 119
Medidas transitorias 126
Un sistema internacional 136
Colofón: así en la Tierra como en el cielo 145

Epílogo. *Eppur si muove* 149

Apéndices 155

Pretexto. Las dimensiones del universo

Vivimos en un planeta cuya atmósfera es transparente a la radiación lumínica, y por ello resultó útil desarrollar ojos para desenvolvernos en nuestro entorno y, en un momento dado, alzarlos al firmamento y observar que allí había otras luces. Si nuestra especie hubiera surgido en un mundo con una atmósfera opaca a la luz, tal vez interaccionaríamos con nuestro entorno por ecolocalización, tal vez no sabríamos nada de las estrellas y creeríamos que la Tierra es el único mundo que existe. Y quizá no habríamos desarrollado la tecnología, pues esas luces en el cielo que se mueven en patrones cambiantes pero predecibles fueron uno de los principales motores del desarrollo científico. Afortunadamente, en el mundo en que vivimos la noche deja ver el espectáculo de los astros que nos rodean.

El cielo ha sido desde los inicios de nuestra especie una fuente de fascinación, extrañeza, maravilla, temor y curiosidad. En parte por el misterio que representaba, y en parte porque tenía un impacto directo en la vida cotidiana. La astronomía siempre mostró una clara utilidad práctica, pues permitía averiguar el inicio de las estaciones, programar los ciclos de siembra y cosecha o los ritos religiosos, estimar las lindes entre naciones, hallar la dirección hacia la que se encontraban los lugares sagrados o simplemente hacia la que navegar. Pero también resultaba misteriosa, fuente de temor y admiración: ¿qué eran esas luces en el firmamento?, ¿por qué algunas se mueven y otras no?, ¿a qué distancia están?, ¿pueden influir de alguna forma en nuestro destino? Por ello no debe extrañarnos que la astronomía sea una de las profesiones más antiguas del mundo. Los movimientos de los astros en el cielo generaron modelos matemáticos cuyo objetivo era, entre otros, predecir y describir su comportamiento. Las causas tras ese comportamiento quedaban en un segundo plano, en buena parte porque eran inaccesibles, por ello la astronomía fue tradicionalmente una rama de las matemáticas. Solo a partir del Renacimiento esta rama comenzó poco a poco a desplazar su ámbito de actuación hacia la física, al adquirir más importancia las causas frente a la forma, y en la actualidad la palabra *astronomía* es prácticamente sinónimo de astrofísica. Pero conviene recordar que, cuando lo único que podíamos hacer con los cielos era medir, calcular, describir y predecir, la astronomía era terreno de juego de los matemáticos; entre otras cosas, fue gracias a los problemas que planteó esta disciplina que se desarrollaron plenamente la trigonometría plana, la esférica y las tablas de logaritmos.

Los científicos de la Antigüedad lograron prodigiosas hazañas obteniendo algunas estimaciones preliminares del tamaño de nuestro planeta y la distancia de los astros más importantes, utilizando para ello su ingenio, las matemáticas y herramientas muy elementales. Su trabajo estimuló a las generaciones que los siguieron, dotadas de mejores herramientas matemáticas e instrumentos más precisos, quienes no obstante se enfrentaron a un difícil puzzle lógico. Hay una curiosa simetría en la medición del cielo y la de la Tierra. Para determinar la posición geográfica, la distancia entre dos localizaciones o incluso el tamaño de la propia Tierra era imprescindible realizar mediciones de los astros, como hallar la altura de una estrella o averiguar en qué momento otra cruzaba por el meridiano. Pero esta relación era recíproca, y estimar la posición y la distancia a los astros solo era posible mediante mediciones que tuvieran a la propia Tierra como patrón de medida o conociendo con detalle la distancia entre dos lugares de observación. Así, las medidas de la Tierra y del universo siempre estuvieron entrelazadas. No era posible la geografía de precisión sin la astronomía, ni viceversa. Como veremos, las distancias en uno y otro sistema se podían obtener con cierta sencillez en valores relativos, pero costó mucho esfuerzo romper ese círculo vicioso y lograr pasar de un sistema de magnitudes relativas a otro de magnitudes absolutas, y finalmente averiguar el tamaño (e incluso la forma) del cielo y de la Tierra.

Palos, sombras y triángulos

«Eratóstenes no tenía más herramientas que palos, ojos, pies y cabeza y un gran deseo de experimentar, con estas herramientas dedujo correctamente la circunferencia de la Tierra con una enorme precisión y un porcentaje de error mínimo.»
(Carl Sagan, *Cosmos*, 1980).

Sofocado por el tórrido verano egipcio, el director se seca la frente con un paño y llama a su ayudante.

—Tráeme más agua. ¡Qué calor!

—Maestro, hoy es el día más largo del año, es casi mediodía y estamos a pleno sol. Es normal que haga tanto calor. ¿Por qué no nos acercamos más al muro? Ofrece una buena sombra.

—Porque esto es justamente lo que necesito, un lugar sin sombras. No quiero nada que interfiera en mi medida. Debemos mesurar con precisión la longitud de la sombra del gnomon cuando sea exactamente mediodía. Haz otra marca.

Obediente, el asistente marca con un punzón el extremo de la sombra que proyecta un palo vertical incrustado sobre una tablilla de cera, otra más en una larga secuencia de marcas. Tras ello, introduce un cuenco en el barril junto al muro mientras las cigarras cantan lastimeras en la terraza del observatorio.

—Tomad, agua. ¿Qué esperáis que suceda a mediodía?

—Hace unos meses leí un informe en la biblioteca que llamó mi atención. Contaba que en Siena[1] hay un famoso pozo en el que, durante el mediodía del día más largo del año, el Sol incide justo sobre el fondo, sin iluminar las paredes. He preguntado en el mercado a algunos vendedores que han comerciado en Siena y uno de ellos me confirmó que él mismo vio el fenómeno en una ocasión.

—¿Y eso qué significa?

—Eso significa que, en Siena, durante el día más largo del año, es decir, hoy, el Sol está en el cenit. Y por ese mismo motivo un gnomon como este no debería proyectar ninguna sombra. ¿Qué crees tú que sucederá hoy aquí?

—Pues, sin duda, lo mismo. Cuando el Sol esté en lo más alto alcanzará el cenit y el gnomon no dará sombra.

—Aquí también hay pozos y no he oído a nadie mencionar un fenómeno similar. Haz una nueva marca.

El asistente marca de nuevo sobre la cera el extremo de la sombra del palo vertical, y se queda ligeramente perplejo. «Debe de haberse inclinado» piensa, y con una plomada verifica que el palo sigue estando perfectamente vertical.

—¿Qué sucede, Ilotes?

—Maestro, diría que la sombra es algo más larga ahora. Creía que el gnomon se habría movido, pero todo parece correcto.

[1] No se refiere a la Siena de Italia, sino a la ciudad egipcia hoy día conocida por Asuán.

—¡Estupendo! Entonces ha pasado ya el mediodía. Y, por tanto, tenemos nuestra medida.

—Pero no es posible, la sombra no ha llegado a desaparecer…

—Cierto. ¿Y qué concluyes del hecho de que en Siena el Sol esté ahora en el cenit pero no lo esté aquí?

Tras unos incómodos momentos en los que la cara del asistente refleja su evidente deseo de estar en otro lugar en vez de bajo la inquisidora mirada de su maestro, este concluye:

—Oh, por Serapis, no sé qué os enseñan hoy en día. ¿Es que ya no sabéis razonar? Lo que significa es que el mundo es redondo, como defendía Aristóteles allá en su Liceo. ¿Ese nombre te suena? ¿O tampoco?

El rubor en la cara del asistente alcanza tales cotas que, finalmente, el maestro se apiada de él.

—Está bien. Fíjate, el mundo está curvado, es una esfera. Por eso este gnomon, aunque está vertical, no es paralelo a un gnomon que estuviera vertical en Siena, y por ello sus sombras son distintas. Esto no solo demuestra lo que ya sabíamos. Además, nos va a permitir medir el tamaño del mundo. Vamos, mide el tamaño de la sombra desde la base del gnomon hasta la marca más cercana.

—Sí, maestro —responde, y tras realizar la medida, añade—: Es de tres dedos.

—Y este gnomon es de un codo, es decir, veinticuatro dedos. Pero está incrustado en la tablilla hasta la base, con lo que medirá algo menos. Mide el grosor de la tablilla.

—Es la cuarta parte de un dedo.

Cogiendo otra tablilla, el maestro se pone a realizar algunos cálculos y, tras garrapatear unos instantes, una sonrisa ilumina su cara.

—Ilotes, ya lo tenemos. La proporción entre la sombra y el gnomon se corresponde a un ángulo cincuenta veces menor que el círculo completo. Siena está justo al sur de aquí, por los informes que he recogido del ejército de Ptolomeo y de diferentes caravanas de mercaderes, que vienen a Alejandría yendo siempre hacia el norte. Las distancias que me han dado también coinciden, Siena está a 5000 estadios. Si eso corresponde a la cincuentava parte del círculo del mundo, el mundo debe medir cincuenta veces más, es decir 250 000 estadios. ¡Eureka!, como le gusta decir a mi amigo Arquímedes.

—¡Lo hemos encontrado!

—¡Sin duda! Somos las primeras personas que conocen las dimensiones del mundo. Solo por eso, mi buen Ilotes, tu nombre pasará a la historia de la ciencia.

—¡Gracias, maestro Eratóstenes! —contestó el ayudante, con su rostro radiante de satisfacción.

Pero el director de la Biblioteca apenas le oyó, pues su cabeza bullía de ideas sobre cómo plasmar todo aquello en un libro. Despidiéndose con un gesto, se dirigió al interior del gran edificio, que era la joya científica de Alejandría.

La sombra de Eratóstenes

Eratóstenes de Cirene (276-194 a. C.) fue uno de los primeros directores del Museo de Alejandría y de su institución hermana, la famosa Biblioteca de Alejandría, fundadas en torno al año 300 a. C. por Ptolomeo I, primer faraón del período helenístico de Egipto. Su nieto Ptolomeo III le encargó a Eratóstenes la dirección del Museo en 236 a. C. Inspirado en el Liceo de Aristóteles, el Museo era un lugar dedicado a la recopilación del saber, la investigación y la enseñanza, cuyo funcionamiento era en muchos aspectos similar al de las actuales universidades, mientras que la biblioteca almacenaba los libros necesarios para la labor de los numerosos académicos que trabajaban en el Museo, pagados por el Estado. La Biblioteca de Alejandría fue la más grande de la Antigüedad, y disponía de una inmensa colección de libros, llegando a albergar casi un millón de volúmenes en su máximo apogeo. Eratóstenes era geógrafo y, al parecer, fue el primero en usar un entramado de líneas de latitud y longitud para trazar un mapa del mundo, con el meridiano cero pasando por Alejandría, y extendía así el trabajo de Dicearco de Mesina (quien trazó en su mapa un único meridiano y paralelo centrados en Rodas, a modo de referencia). Era también astrónomo, por lo que una de sus primeras acciones fue dotar a la institución de un observatorio astronómico que instaló en una de las terrazas de la biblioteca (en 230 a. C.). Fue con medidas tomadas allí donde hicieron sus descubrimientos los dos astrónomos más reputados de la Antigüedad. Por un lado, Hiparco, del que hablaremos más adelante, que confeccionó el primer catálogo de magnitudes estelares del que se tiene constancia y descubrió la precesión de los equinoccios (el curioso fenómeno por el cual el norte celeste va cambiando de posición a lo largo de los siglos). Y por otro, Claudio Ptolomeo, padre de un barroco modelo matemático del sistema solar que dominó y encorsetó la astronomía medieval hasta la llegada de Copérnico.

Transfondo científico del trabajo de Eratóstenes

Hoy día parece claro que el sistema científico griego era en realidad mucho más avanzado de lo que se pensaba, y muy moderno en su concepción. Disponía de una amplia red científica de colaboraciones, transmisión de la información y viajes académicos (el propio Eratóstenes estudió durante una temporada en Atenas). El calado de la revolución científica que tuvo lugar en la antigua Grecia fue probablemente equiparable a la del Renacimiento, aunque luego cayera en el olvido y hasta nuestros días solo hayan llegado retazos. Lucio Russo en su libro *La rivoluzione dimenticata* (2003) achaca su declive a la conquista romana, ya que los patricios se llevaron a los sabios griegos (a los que admiraban pero no comprendían) como esclavos tutores de sus hijos, desmantelando en el proceso el sistema científico heleno. Artefactos tan desarrollados como la máquina de Anticitera o la máquina de vapor de Herón no pudieron haber aparecido aislados de la nada, sino que requirieron la existencia previa de un contexto científico igualmente desarrollado. La relación de la ciencia helenística con la tecnología fue clave para su desarrollo, e incluso en escuelas con un mayor peso en lo cualitativo y en la deducción a través del razonamiento, como el Liceo ateniense, se potenció el enfoque empirista.

De hecho, cuando Eratóstenes realizó la medición recreada en el diálogo que da inicio a este capítulo, la esfericidad de la Tierra estaba bien establecida: la primera demostración había sido obra de **Aristóteles (384-322 a. C.)**, fundador del Liceo, y la había dejado escrita en su libro *Peri ouranoú* ('Sobre el cielo'). La demostración se basa en dos hechos experimentales. El primero es que los eclipses lunares siempre tienen lugar en fase de luna llena, cuando la Luna se encuentra justo en dirección opuesta al Sol visto desde la Tierra. Por lo tanto, la Tierra se halla entre ambos cuerpos, de lo que dedujo que la mancha oscura que ensombrece la Luna durante el eclipse debía ser la sombra de la propia Tierra. Y el segundo es que esta sombra es siempre redonda. Podría parecer que esto solamente indica que la Tierra es redonda, es decir, que en principio podría tener la forma de un disco plano flotando en el espacio. Pero un eclipse de Luna no tiene lugar siempre a la misma hora; a veces el eclipse sucede cuando la Luna llena está baja en el horizonte, cerca del este, poco después de la puesta de sol; otras veces, cuando está cerca del oeste, poco antes de amanecer; y en otras ocasiones cuando está culminando cerca del sur, a medianoche.

Como se puede ver en la figura 1, si la Tierra fuera realmente un disco plano, la sombra proyectada sobre la Luna sería diferente en cada una de estas circunstancias y solamente se vería perfectamente circular cuando la Luna se

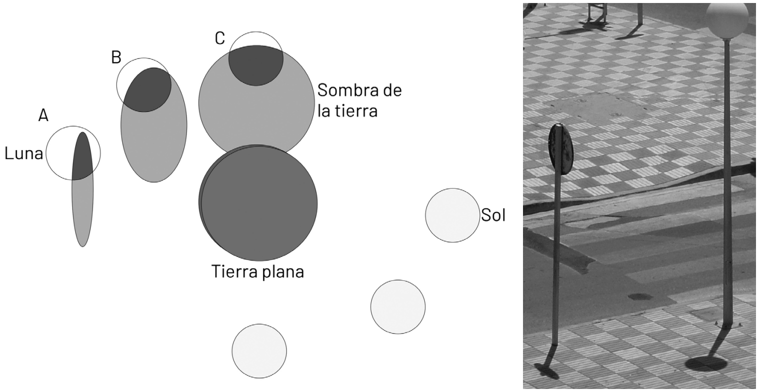


Figura 1. Izquierda, primeras fases de un eclipse de Luna suponiendo que la Tierra fuera plana, en función de si el eclipse lunar tiene lugar cerca del amanecer/anochecer (A) o justo a medianoche (C), más una situación intermedia. Solamente en el caso de un eclipse justo a medianoche la sombra de una Tierra en forma de disco sería perfectamente circular, mientras que si el eclipse ocurre cerca del orto u ocaso solar, la sombra mostraría una marcada excentricidad. Para que en todas las circunstancias la sombra sea circular, la Tierra debe ser esférica. En gris se muestra la sombra de la Tierra y se ha oscurecido la parte que se proyecta sobre la Luna. A la derecha, sombra circular proyectada en el suelo por una farola esférica, y elíptica en el caso del disco de una señal de tráfico (cortesía de Enric Marco).

encontrara justo perpendicular a la Tierra, a medianoche; mientras que se vería como una elipse de excentricidad creciente cuanto más cerca del horizonte se encontrara. El hecho de que en todas las circunstancias sea siempre redonda demuestra que en realidad es una esfera.

En su libro, Aristóteles da un argumento más. Cuando uno se mueve en dirección norte o sur, el horizonte nocturno cambia de forma apreciable. Hay algunas estrellas visibles desde Egipto que no lo son desde Grecia. Y la altura a la que culminan las estrellas también cambia en función de la latitud. Al observar que este cambio era apreciable tras recorrer distancias relativamente cortas, Aristóteles dedujo que el tamaño de la Tierra no podía ser muy grande, «no es un círculo de gran tamaño». También se atribuye a Aristóteles otra demostración clásica de la esfericidad de la Tierra, aunque muy probablemente sea apócrifa. Nos referimos al conocido asunto de que cuando un barco se aleja mar adentro, la primera parte que deja de verse de él es el casco y lo último el mástil (esto es más fácil de decir que de observar debido a la aberración atmosférica y las brumas —aunque ciertamente es observable). La causa de ello no puede ser simplemente la distancia. En una Tierra plana los barcos se harían cada vez más pequeños hasta simplemente desaparecer. Además, si cerca de la costa hay una torre o faro y uno se sube en el momento en que el barco ha desaparecido de la vista, de repente puede volver a verse el barco; como si se asomara tras una colina, aunque en este caso la colina es la curvatura de la Tierra.

En el momento de realizar su medición, Eratóstenes no solo conocía la esfericidad de la Tierra, sino que además sabía que la distancia al Sol era lo suficientemente grande para considerar que sus rayos inciden en paralelo. Sin estas dos premisas no podría haber calculado el tamaño de la Tierra, ya que su resultado por sí solo no demostraba nada. La discrepancia de sombras entre Siena y Alejandría también podía explicarse en un contexto de Tierra plana, situando el Sol lo suficientemente cerca, como se ve en la figura 2.

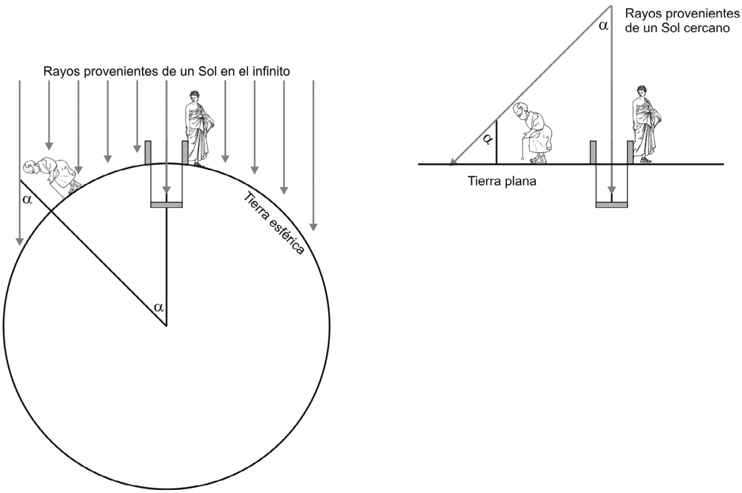


Figura 2. Dos casos en los cuales la luz del Sol podría incidir directamente en el fondo de un pozo en Siena al mismo tiempo que un gnomon produce una sombra apreciable en Alejandría: a la izquierda, una Tierra esférica de radio R y un Sol lejano; a la derecha, una Tierra plana y un Sol cercano a distancia R. Solamente a partir de este resultado es imposible discernir cuál es la situación real.

La medición de Eratóstenes del tamaño de la Tierra

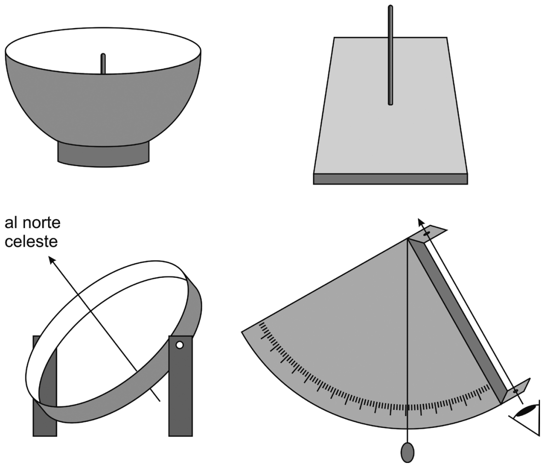
El trabajo de Eratóstenes nos ha llegado a través de terceros. Los detalles de su famosa medición del perímetro terrestre, que al parecer publicó en un libro, se han perdido salvo por fragmentos mencionados por otros autores clásicos como Herón de Alejandría (que incluso revela el nombre del libro: *Peri tēs anametrēsiōs tēs gēs,* 'Sobre la medición de la Tierra'), Plinio, Estrabón o Cleómedes. Este último realizó, pocos siglos después, un resumen razonablemente detallado de la medición de Eratóstenes en la que se basa a grandes rasgos la recreación al inicio de este capítulo. Curiosamente, aunque la cifra que cita Cleómedes para el perímetro terrestre es de 250 000 estadios, los otros tres autores dan para la medida de Eratóstenes un valor de 252 000. La explicación tradicional de esta diferencia de 2000 estadios es que en algún momento alguien modificó el valor para que se pudiera dividir de manera sencilla en grados. Así, 252 000 = 360 × 700, y a un grado de arco sobre la superficie terrestre le corresponden 700 estadios.

Por supuesto, no sabemos si las longitudes del gnomon y su sombra que se narran en la recreación son las correctas, pero son razonables. Si el lector ha echado cuentas habrá visto que desde el vértice del gnomon la sombra ha proyectado un ángulo de prácticamente 7,2°. Y, en efecto, 360°/7,2° = 50. Con una distancia entre Alejandría y Siena de 5000 estadios, el cálculo del perímetro terrestre resulta trivial. Cómo estimó Eratóstenes esa distancia no queda claro, e incluso adquiere tintes de leyenda. La hipótesis más sencilla supone que preguntaba a quienes hacían a menudo el trayecto entre ambas ciudades, como proponemos en la recreación; esto es quizás lo más probable, si bien la agrimensura estaba muy avanzada en Egipto, pues cada vez que el Nilo se desbordaba había que volver a trazar las lindes. En cambio, Carl Sagan en su libro *Cosmos* (1980) da otra versión, pues afirma que Eratóstenes contrató a alguien para que midiera la distancia entre ambas ciudades andando, aunque no cita la fuente de esta información.

Continúa en la p. 24

Instrumentos astronómicos en la antigüedad

El más sencillo de los instrumentos de medida es el **gnomon**, una varilla recta situada en posición vertical sobre una superficie plana horizontal en la que proyecta su sombra producida por los rayos del Sol para medir la altura de este astro en un momento dado. El gnomon, probablemente uno de los instrumentos más antiguos usados en astronomía, ya se utilizaba en Babilonia. Se cree que Anaximandro (610-545 a. C.) introdujo su uso en Grecia. A él se atribuye la invención del **polos**, el equivalente esférico del gnomon; este instrumento consiste en una superficie semiesférica cóncava y sobre ella un estilo cuyo extremo coincide con el centro de la esfera (no es necesario que esté vertical, lo que importa es el extremo). Como el camino del Sol en el firmamento a lo largo del día es circular, la sombra de la punta del estilo describe arcos perfectos sobre la superficie esférica, de modo que proporciona una representación invertida de la trayectoria solar. El polos mide los mismos parámetros que el gnomon (solsticios y equinoccios, latitud, puntos cardinales…) pero su interpretación es más sencilla, ya que mide directamente ángulos. Un polos se puede transformar fácilmente en un reloj de sol. El típico reloj de sol romano consiste en un polos dividido por la mitad. La **armilla equinoccial**, también conocida como anillo de Hiparco, aunque en realidad es anterior a este astrónomo del siglo II a. C., consta de un anillo paralelo al ecuador celeste (la proyección en el cielo del ecuador terrestre), es decir, orientado al norte y con un ángulo respecto al suelo igual al de la latitud local. Esta configuración permite determinar los equinoccios



De izquierda a derecha y de arriba abajo, un polos, un gnomon, una armilla equinoccial y un cuadrante.

con mayor precisión que con el gnomon o el polos, pues en esos momentos el Sol se encuentra justo en el ecuador celeste y, por tanto, en los equinoccios no llega a iluminar el interior de la armilla. Si se usa de forma inversa permite medir la latitud, es decir, si se sabe con certeza que está teniendo lugar un equinoccio, al orientar la armilla hacia el norte, bastará con buscar el ángulo en que el sol no haga sombra en su interior: ese ángulo equivaldrá a la latitud. Para medir la altura de otros astros se usaba el **cuadrante**, una pieza con la forma de la cuarta parte de un círculo sobre la que se dispone una graduación angular, una mirilla con la que se observa el astro y una plomada que indica la medida. La idea original de este instrumento se atribuye a Ptolomeo, aunque su uso no resultó práctico hasta mucho tiempo después, ya que no se disponía de la técnica suficiente para realizar una graduación precisa del cuadrante.

Pero ¿a cuánto equivale un estadio? Esta unidad de medida correspondía a 600 pies, la longitud de un estadio olímpico en la Antigüedad (de ahí el nombre de la unidad; el equivalente moderno sería medir en 'tantos campos de fútbol'). Así, sabiendo cuánto mide un pie, tendremos la respuesta. Hoy en día existen estándares internacionales de medidas, pero durante la mayor parte de la historia cada región ha contado con unidades de peso, distancia, volumen, etcétera, con valores diferentes incluso cuando compartían el mismo nombre. Así, en la antigua Grecia el pie ático, el dórico y el jónico no medían exactamente lo mismo sino 294,1, 326,9 y 348,7 milímetros respectivamente, por lo que en función del valor del pie que se use, se obtendrán diferentes valores para el estadio: 176,4, 196,1 y 209,2 metros respectivamente.

¿Puede estimarse el valor del estadio a través del cálculo de Eratóstenes? Google Earth da una distancia en línea recta entre Asuán y Alejandría de unos 850 kilómetros. Dado que el recorrido de las caravanas no se haría estrictamente en línea recta, la distancia sería algo mayor. Si se divide esa longitud entre 5000 estadios, la estimación que obtenemos es que el «estadio alejandrino» equivaldría a algo más de 170 metros. De hecho esta medida encaja bastante bien con el estadio ático de 176,4 metros. Por otro lado, si se traza un recorrido a pie mediante Google Maps desde Asuán hasta Alejandría, que transcurra en la mayor parte posible por el valle del Nilo (asumiendo que las caravanas prefiriesen tener cerca una fuente de agua y que las carreteras actuales no divergen mucho de las rutas de la Antigüedad), la distancia que obtenemos es de 1040 kilómetros, que dividida entre

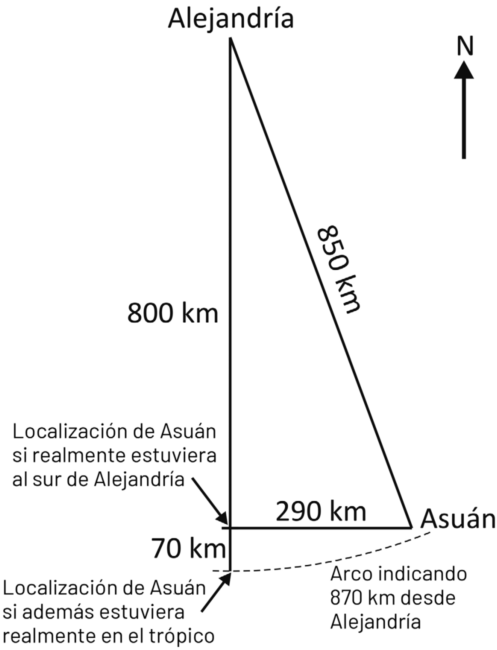


Figura 3. Comparación entre la localización real de Asuán respecto a Alejandría y la supuesta por Eratóstenes.

5000 estadios da una estimación de 208 metros, más cercana al estadio jónico. La ingeniería inversa no nos ha servido de mucho. Con todo, muchos autores defienden que Eratóstenes utilizó el estadio ático, tal vez porque es el que ofrece el menor margen de error. En unidades actuales, la estimación para el perímetro de la Tierra de Eratóstenes sería de 44 100 kilómetros, es decir, un exceso del ~10 % respecto del valor real. Realmente, se trata de un error muy pequeño para un cálculo realizado con herramientas tan sencillas.

El cálculo de Eratóstenes, aunque matemáticamente impecable, no está exento de errores debido a las asunciones que hay en él. Asuán no se halla exactamente al sur de Alejandría, sino 290 kilómetros más hacia el este. Y tampoco se encuentra exactamente en el trópico (donde debería estar para que no se produjeran sombras durante el solsticio de verano); para ello debería localizarse 70 kilómetros más al sur. En relación a la distancia entre Asuán y Alejandría de 850 kilómetros, estos son números importantes que pueden introducir errores adicionales también de en torno al 10 %. Pero como puede verse en la figura 3, los dos errores se compensan entre sí. Si Siena realmente hubiera estado donde él creía que estaba situada, la distancia habría sido solo un 2 % mayor que la distancia que había hasta la Siena real.

La medición de Posidonio del tamaño de la Tierra

La medición de Eratóstenes inspiró otras estimaciones similares del tamaño de la Tierra. Un siglo después, Posidonio de Apamea observó en Alejandría que la estrella Canopo alcanzaba una apreciable altura cuando culminaba, mientras que en Rodas apenas se divisaba sobre el horizonte. Basándose en el trabajo de Eratóstenes, desde Alejandría midió la altura de Canopo en su punto más alto en siete grados y medio (1/48 del círculo). Curiosamente, también valoró la distancia entre Alejandría y Rodas en 5000 estadios, con lo que estimó la curvatura de la Tierra en 240 000 estadios, un valor más cercano al perímetro real de la Tierra. Pero posteriormente rebajó el cálculo de la distancia de Rodas a Alejandría a 3750 estadios, de modo que obtuvo un valor para el perímetro terrestre de 180 000 estadios (unos 32 000 km). Por extraño que parezca, la segunda estimación de la distancia entre Alejandría y Rodas, que se aproxima más a la distancia real (600 km, unos 3400 estadios áticos o 2900 estadios jónicos) da peor estimación del tamaño de la Tierra. Esto se debe a que la diferencia de latitud entre Rodas y Alejandría es en realidad de 5,2°, es decir 1/70 de círculo, no los 7,5° que Posidonio midió. Su primer cálculo estimó al alza la distancia entre las ciudades pero a la baja la fracción del círculo completo a la que correspondía esa distancia, en un nuevo ejemplo de errores que se compensan entre sí. No obstante, el segundo valor de 180 000 estadios dado por Posidonio fue el que el influyente Claudio Ptolomeo introdujo en su obra *Geographia*, y el que según algunos historiadores emplearía Cristóbal Colón para convencer a los Reyes Católicos de que las Indias estaban a la vuelta de la esquina. De hecho, la idea de llegar a las Indias navegando hacia el oeste es de origen clásico. El escritor latino Estrabón en su libro *Geographica* escribió que «Si de las mediciones más recientes de la Tierra se usa la que hace que la Tierra sea más pequeña en circunferencia, me refiero a la de Posidonio que estima su circunferencia en alrededor de 180 000 estadios [...] y se navega hacia el oeste en línea recta, se llegará a la India antes de 70 000 estadios».

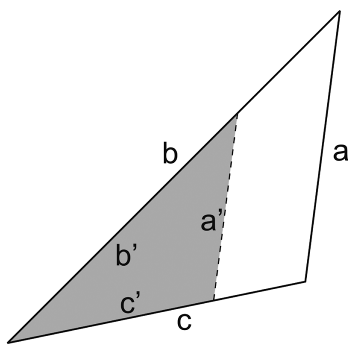
Tantas cosas que medir

Volviendo a Eratóstenes, las fuentes clásicas indican que el director de la Biblioteca de Alejandría también realizó estimaciones de la distancia a los principales astros. Así, en *De placitis philosophorum*, libro tradicionalmente atribuido

Continúa en la p. 30

El teorema de Tales

El teorema de Tales sobre triángulos semejantes fue una de las principales herramientas de la trigonometría griega. Se le atribuye a Tales de Mileto, un científico griego que vivió entre el 624 y el 546 a. C. y fue uno de los padres de la geometría. El teorema de Tales, también llamado teorema de la intersección, establece que si en un triángulo se dibuja una línea paralela a uno de los lados que corte los otros dos (la línea discontinua en el siguiente ejemplo), se obtiene un triángulo (zona sombreada) que es semejante al primero, donde triángulos semejantes significa que los ángulos de los vértices de los respectivos triángulos son iguales:



Dos triángulos semejantes con uno de sus vértices coincidentes.

El corolario del teorema es el que proporciona la verdadera herramienta de cálculo al establecer que los lados son proporcionales, es decir, que los cocientes entre lados equivalentes de ambos triángulos valen lo mismo: $a/b = a'/b'$, $c/b = c'/b'$, etcétera. Plutarco cuenta en *El Banquete de los siete sabios* que Tales halló la altura de una pirámide mediante un gnomon y este corolario, midiendo la longitud de la sombra de la pirámide y la longitud de la sombra del gnomon:

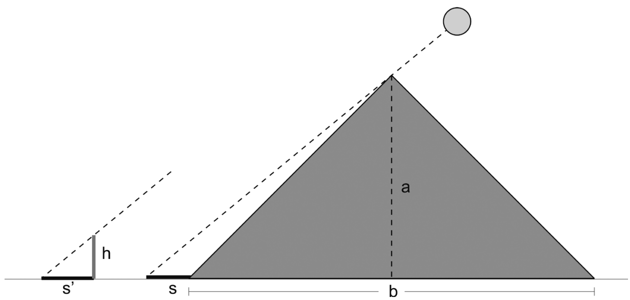


Diagrama de sombras para hallar la altura de una pirámide con un gnomon.

Conociendo la altura *h* del gnomon y la base *b* de la pirámide, se ha de cumplir que $a/(s + b/2) = h/s'$, con lo que la altura de la pirámide es $a = (s + b/2)h/s'$.

a Plutarco aunque de dudosa autoría, se menciona que Eratóstenes midió la distancia entre la Tierra y la Luna en 780 000 estadios; si se considera el propio cálculo de Eratóstenes sobre el perímetro de la Tierra, esto puede reescribirse como 9,8 veces el diámetro de la Tierra (el valor real es 30 veces). Por su parte, Macrobio en su *Comentario al Sueño de Escipión* cuenta que en el *Libro de las Dimensiones* de Eratóstenes (quizás se trata del mismo libro mencionado anteriormente, *Sobre la medición de la Tierra*) este calculó que el diámetro del Sol era 27 veces el diámetro de la Tierra. Por último, otras fuentes como Estobeo o Eusebio de Cesárea mencionan el cálculo de Eratóstenes para la distancia al Sol. La medición que da Estobeo es de «cuatrocientas miríadas de miríadas de estadios más ochenta miríadas estadios». Teniendo en cuenta que una miríada son 10 000, esto da una cifra de 40 000 080 000, es decir $\sim 4 \times 10^{10}$ estadios, lo que usando un estadio de ~180 metros daría una cifra de 7.2×10^{9} kilómetros, 50 veces mayor que la distancia real. Por ello, la repetición de la palabra miríada suele interpretarse como un error de transcripción, y se toma como correcta la estimación de 4 080 000 estadios (que es 200 veces menor que la distancia real). Eusebio de Cesárea por su parte coincide y da como valor «8 miríadas y 400 miríadas de estadios», que también corresponde a 4 080 000, aunque algunos autores han traducido la frase como «(8 miríadas y 400) miríadas de estadios», es decir, 804 000 000 estadios. Sorprendentemente, esta estimación traducida a kilómetros da un valor de unos 145 millones de kilómetros, muy cercana al valor real de casi 150 millones.

Lamentablemente, no nos ha llegado ningún libro de Eratóstenes donde se detallen los pormenores de cómo se realizaron estas estimaciones, ni tampoco aparecen en ninguna de las otras obras clásicas que citan su trabajo, con lo que no hay forma de saber si realmente Eratóstenes llegó a calcular la distancia desde la Tierra al Sol con tal extraordinaria precisión (aunque las coincidencias entre Eusebio y Estobeo parecen más bien favorecer el valor de 4 080 000). Pero es posible que sus procedimientos no fueran muy diferentes de los que realizara setenta años antes **Aristarco de Samos**, que por suerte sí nos han llegado.

El centro de Aristarco

Aristarco de Samos fue uno de los primeros usuarios de la Biblioteca de Alejandría, casi un siglo antes de que la regentara Eratóstenes. Vivió entre 310 y 230 a. C. y, conforme a los datos disponibles, fue el primer científico que postuló el heliocentrismo. Su modelo defendía que el Sol se encontraba en el centro del universo y que la Tierra orbitaba alrededor del Sol y giraba además sobre su eje. Por desgracia, el manuscrito que explicaba el modelo heliocéntrico se ha perdido y solo se conoce a través de una mención en el libro *El contador de arena* de Arquímedes de Siracusa. En cambio, sí ha sobrevivido su libro *De los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna* (no el original sino copias griegas y árabes posteriores) donde Aristarco da detalle de sus medidas y estimaciones de las magnitudes mencionadas en el título, incluyendo detallados diagramas.